ALGEBRA LINEARE

- TEORIA
- ESERCIZI (SVOLTI e COMMENTATI) RELATIVI AD OGNI ARGOMENTO TRATTATO
- TEST e COMPITI D'ESAME (SVOLTI e COMMENTATI)
- SCHEMI CON TUTTE LE TIPOLOGIE DI TEST E COMPITI POSSIBILI

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745


master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

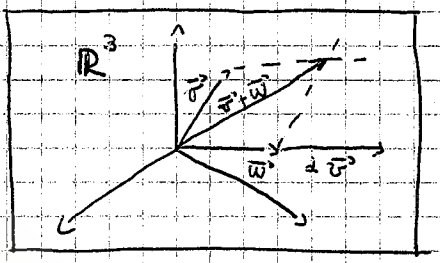
GLI SPAZI VETTORIALI

① Definizione

Uno spazio vettoriale reale è un insieme V (i cui elementi sono detti vettori) per il quale siano definite due operazioni "+" e "·":

- operazione binaria (somma) "+" ovvero: $V \times V \to V$ $(v+w)$
- prodotto per numero "·" ovvero: $\mathbb{R} \times V \to V$ $(\lambda v \in V)$

Le proprietà che devono essere soddisfatte sono le seguenti:



1. $\forall v, w \in V \quad v+w = w+v$
2. $\forall v, w, u \in V \quad (v+w)+u = v+(w+u)$
3. $\exists 0 \in V$ tale che $\forall v \in V \quad v+0 = v$
4. $\forall v \in V \ \exists (-v) \in V$ tale che $v+(-v)=0$
5. $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} \ \forall v \in V \quad (\lambda+\beta)v = \lambda v + \beta v$
6. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall v, w \in V \quad \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$
7. $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} \ \forall v \in V \quad (\lambda\beta)v = \lambda(\beta v)$
8. $\forall v \in V \quad 1 \cdot v = v$ e $0 \cdot v = 0$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

② Esempi

2.1 Vettori colonna

Cominciamo con lo spazio $\mathbb{R}^n$, ottenuto prendendo il prodotto cartesiano di n copie di $\mathbb{R}$, dove $n \geq 1$ è un intero qualsiasi; scriviamo un elemento x di $\mathbb{R}^n$ come vettore colonna: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e chiamiamo x_i la i-esima componente di x.

Definiamo le operazioni di spazio vettoriale "componente per componente":

$\mathbb{R}^n \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1 \dots x_n \in \mathbb{R} \right\}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

NOTA L'insieme di tutti i polinomi $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_n x^n)$ denotato con $\mathbb{R}[x]$ è uno spazio vettoriale rispetto a "+" e "·"

2.2 Matrici

Dati interi $n, m \geq 1$ definiamo ora lo spazio $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ delle matrici reali $n \times m$, ovvero delle tabelle rettangolari di numeri reali aventi n righe e m colonne:

$$M_{n\times m}(\mathbb{R}) : \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ per } i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots m \right\}$$

Somma: $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

La somma si può effettuare solo tra matrici con la stessa taglia

Prodotto per 2: $(2A)_{ij} = 2(A)_{ij}$

$$2 \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & \cdots & 2a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_{n1} & \cdots & 2a_{nm} \end{pmatrix}$$

Il prodotto per 2 si può effettuare tra matrici di qualsiasi tipo e un qualsiasi numero

Prodotto tra matrici: sia A una matrice di taglia $m \times n$ e B una matrice di taglia $n \times k$, le due matrici sono tali che il n° di colonne della 1ª sia uguale al n° delle righe della seconda:

$$A_{m\times n} \; B_{n\times k}$$

L'esito è una matrice di taglia $m \times k$ (detto anche prodotto righe per colonne)

$$(a_1, a_2 \dots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Quando 2 matrici sono uguali ($A = B$)?

- stessa taglia ($m \times n$)
- $\forall i = 1, \dots, m \quad \forall j = 1, \dots, n \qquad (A)_{ij} = (B)_{ij}$

Proprietà distributive:

Prop (1) Siano $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, siano $B, C \in \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$ siano $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$A(\lambda B + \beta C) = \lambda AB + \beta AC$$

(2) Siano $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sia $C \in \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$ e siano $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Allora

$$(\lambda A + \beta B)C = \lambda AC + \beta BC$$

Dimo (1)

Scriviamo $a_{ij} = (A)_{ij}$
$b_{ij} = (B)_{ij}$
$c_{ij} = (C)_{ij}$

Vogliamo dimostrare che $A(\lambda B + \beta C) = \lambda AB + \beta AC \quad \forall i,j$

→ controlliamo la taglia: $\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{(\lambda B + \beta C)}_{n\times k}$ è $m\times k$

$\lambda \underbrace{AB}_{m\times n\ n\times k} + \beta \underbrace{AC}_{m\times n\ n\times k}$ è $m\times k$ (ciascun addendo è $m\times k$)

→ controlliamo i coefficienti: $T = A(\lambda B + \beta C) \qquad S = \lambda AB + \beta AC$

Svolgimento: $(T)_{ij} = \sum_{p=1}^{n} (A)_{ip}\,(\lambda B + \beta C)_{pj} = \sum_{p=1}^{n} (A)_{ij}\,(\lambda (B)_{pj} + \beta (C)_{pj}) = \lambda \sum_{p=1}^{n} (A)_{ip}\,(B)_{pj} + \beta \sum_{p=1}^{n} (A)_{ip}\,(C)_{pj}$

$= \lambda (AB)_{ij} + \beta (AC)_{ij} = \boxed{(S)_{ij} = (T)_{ij}}$ ev.d

Il prodotto tra 2 matrici non è commutativo

AB o BA?

(1) $A_{m\times n}$, $B_{n\times k}$ con $m \neq k$ — AB si può fare, BA non si può fare

(2) $A_{m\times n}$, $B_{n\times m}$ con $m \neq n$ — AB, BA esistono ma hanno taglie diverse ($\underbrace{AB}_{m\times n}$, $\underbrace{BA}_{n\times m}$)

(3) $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$ (quadrate) — AB, BA esistono e hanno stessa taglia ma quasi sempre $AB \neq BA$